Διαγώνισμα προσομοίωσης χειμερινής περιόδου
στα Μαθηματικά προσανατολισμού
2019-2020
Συμμετέχουν τα σχολεία:
2ο Περιστερίου - 14ο Περιστερίου - 2ο Πετρούπολης

Θέμα A

Α1. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ ή -1».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση; (Μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0.

β) Έστω η «1-1» συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ για κάθε $x \in A$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

δ) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

ε) Ισχύει $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 1$

Μονάδες 10

Θέμα B

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\beta x}, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \beta\sigma\upsilon\nu x + \beta, & x>0 \end{cases}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$ και $g(x) = \begin{cases} x^5 - \frac{\eta\mu 2x}{x}, & x<0 \\ x^5 - 1 - \sigma\upsilon\nu x, & x \ge 0 \end{cases}$.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, να δείξετε ότι:

Β1. $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x}{x}, & x<0 \\ \sigma\upsilon\nu x + 1, & x \ge 0 \end{cases}$

Μονάδες 6

Β2. ορίζεται η συνάρτηση $h(x) = (f+g)(x)$ και ότι έχει τύπο $h(x) = x^5$.

Μονάδες 6

Β3. η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}.

Μονάδες 1+6

Β4. υπάρχει $\gamma \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma) = 3 - h(\gamma)$.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x,\ x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση $e^{-x}\left(e^{-2x} + 3x^2\right) < x\left(3e^{-2x} + x^2\right) + 1$

Μονάδες 6

Γ3. Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$e^{-g(x)} - e^{-x(2-x)} = g(x) - x(2-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι $g(x) = x(2-x)$.

Μονάδες 5

Γ4.α) Αν ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με την Α γωνία ορθή την πλευρά $(AB) = \sqrt{g(x)}$ και την $(A\Gamma) = x$ με $x \in (0,2)$ να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0} ημB\ ,\quad \lim_{x\to 2} εφB\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{2E(x)}\ ,\ \text{όπου}$$

$P(x)$ η περίμετρος και $E(x)$ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .

β) Να υπολογίσετε το όριο: και $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{-g(x)} + \sqrt{x^2 - 3x}}{\sqrt{-g(x)} - \sqrt{x^2 - 5x}}$.

Μονάδες 2+2+3+4

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = e^{-x} - 3x^3 - 1$ και $f(x) = ημg(x) - e^{-x} + 3x^3 + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε το $g^{-1}\left(\frac{1}{e} - 4\right)$.

Μονάδες 1+3

Δ2. Να βρείτε τη ρίζα και το πρόσημο της g.

Μονάδες 1+3

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρείτε το $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2^{f(x)} + 3^{f(x)} - 5}{3^{f(x)} + 5^{f(x)}}$.

Μονάδες 5

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $g^2(x_0) + 4g(x_0) = 5 - 5x_0$ (μονάδες 5). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_0) > 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 7

Καλή τύχη στις Πανελλαδικές εξετάσεις

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...\alpha_1 x+\alpha_0\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1 x\right)+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+...+\alpha_1\lim_{x\to x_0}x+\alpha_0=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=P(x_0)$$

Α2. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & x<x_0\\ -1, & x\geq x_0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ όμως $|f(x)|=1,\ x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=1$.

Α3. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Α4. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Είναι $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{\beta x}\underset{\substack{x\to 0^-,\ u\to 0^-\\ u\to 0^-}}{\overset{u=\alpha x}{=}}\lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u}{\frac{\beta u}{\alpha}}=\lim_{u\to 0^-}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\eta\mu u}{u}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot 1=\frac{\alpha}{\beta}$ και

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\beta\sigma\upsilon\nu x+\beta)=2\beta$. Επειδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, είναι συνεχής και στο $x=0$, άρα $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=2\beta=2\Leftrightarrow\beta=1$ και $\alpha=2$

Άρα $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu 2x}{x}, & x<0\\ \sigma\upsilon\nu x+1, & x\geq 0\end{cases}$.

Β2. $A_f\cap A_g=\mathbb{R}$ οπότε ορίζεται η συνάρτηση h με $A_h=\mathbb{R}$.

Για $x<0$ έχουμε $h(x)=f(x)+g(x)=\frac{\eta\mu 2x}{x}+x^5-\frac{\eta\mu 2x}{x}=x^5$.

Για $x\geq 0$ έχουμε $h(x)=f(x)+g(x)=\sigma\upsilon\nu x-1+x^5-1-\sigma\upsilon\nu x=x^5$.

Άρα $h(x)=x^5, x\in\mathbb{R}$.

Β3. Έστω $x_1,x_2\in D_h$ με $h(x_1)=h(x_2)$, τότε: $x_1^5=x_2^5\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η h είναι 1-1.

Για $x<0$ έχουμε $h(x)=y\Leftrightarrow x^5=y\Leftrightarrow x=-\sqrt[5]{-y}\Leftrightarrow h^{-1}(y)=-\sqrt[5]{-y}$.

Για $x\geq 0$ έχουμε $h(x)=y\Leftrightarrow x^5=y\Leftrightarrow x=\sqrt[5]{y}\Leftrightarrow h^{-1}(y)=\sqrt[5]{y}$.

Άρα $h^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt[5]{-x}, & x<0\\ \sqrt[5]{x}, & x\geq 0\end{cases}$.

Β4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $a(x)=f(x)+h(x)-2, x\in[0,\pi]$.

Η α είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$\alpha(0)=f(0)+h(0)-3=2+0-3=-1<0$

$\alpha(\pi)=f(\pi)+h(\pi)-3=0+\pi^5-3=\pi^5-3>0$.

Άρα $\alpha(0)\cdot\alpha(\pi)<0$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Bolzano δηλαδή υπάρχει $\gamma\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $\alpha(\gamma)=0\Leftrightarrow f(\gamma)+h(\gamma)-2=0\Leftrightarrow f(\gamma)=2-h(\gamma)$

Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\,(1)\Rightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\,(2)$

Από (1) + (2)$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ2. $e^{-x}\left(e^{-2x}+3x^2\right)<x\left(3e^{-2x}+x^2\right)+1\Leftrightarrow$

$e^{-3x}+3x^2e^{-x}<3xe^{-2x}+x^3+1\Leftrightarrow$

$e^{-3x}-3xe^{-2x}+3x^2e^{-x}-x^3<1\Leftrightarrow$

$\left(e^{-x}-x\right)^3<1\Leftrightarrow f^3(x)<1\Leftrightarrow f(x)<f(0)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x>0$

Γ3. $e^{g(x)}-e^{-x(2-x)}=g(x)-x(2-x)\Leftrightarrow e^{g(x)}-g(x)=e^{-x(2-x)}-x(2-x)\Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f\left(x(2-x)\right)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

$g(x)=x(2-x),\quad x\in[0,2]$

Γ4.α) Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα έχουμε $\left(\sqrt{x(2-x)}\right)^2+x^2=B\Gamma^2\Leftrightarrow$

ΒΓ=$\sqrt{2x}$ άρα $\lim\limits_{x\to0}\eta\mu B=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{2x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{2x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}=0$.

$\lim\limits_{x\to2}\varepsilon\varphi B=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{\sqrt{x(2-x)}}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x}{\sqrt{x(2-x)}}=+\infty$

$$\lim_{x\to0}\frac{P(x)}{2E(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x+\sqrt{2x}+\sqrt{x(2-x)}}{x\sqrt{x(2-x)}}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\sqrt{x})^2+\sqrt{2x}+\sqrt{x(2-x)}}{x\sqrt{x(2-x)}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{2}+\sqrt{(2-x)}}{x\sqrt{x}\sqrt{(2-x)}}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2}+\sqrt{(2-x)}}{x\sqrt{(2-x)}}=+\infty$$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{-g(x)}+\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{-g(x)}-\sqrt{x^2-5x}}$

<u>α τρόπος</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{-g(x)}+\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{-g(x)}-\sqrt{x^2-5x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-5x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{5}{x}}\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{5}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{5}{x}}}\right]=+\infty$$ γιατί για x>0

$$\sqrt{1-\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{5}{x}}>0 .$$

<u>β τρόπος</u> $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{-g(x)}+\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{-g(x)}-\sqrt{x^2-5x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-5x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-5x})}{(\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-5x})(\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-5x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-5x})}{3x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}}\right)}{3x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}}\right)}{3}=+\infty$$

Θέμα Δ

Δ1.Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow-3x_1^3>-3x_2^3\Leftrightarrow-3x_1^3-1>-3x_2^3-1\ (1)$ και $-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\ \ (2)$.

Από $(1)+(2)\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow g\searrow\mathbb{R}\Rightarrow g\ 1-1$, οπότε η g αντιστρέφεται.

Έστω $g^{-1}\left(\frac{1}{e}-4\right)=x$, τότε $\frac{1}{e}-4=g(x)\Leftrightarrow g(x)=e^{-1}-4=g(1)\overset{g\,1-1}{\Leftrightarrow}\alpha=1$, άρα $g^{-1}\left(\frac{1}{e}-4\right)=1$

Δ2. Η g έχει προφανή ρίζα την $x=0$ γιατί $g(0)=e^0-3\cdot0-1=1-1=0$ και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Για κάθε $x<0\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0$ και για κάθε $x>0\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(0)\Leftrightarrow g(x)<0$

Δ3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu g(x)-e^{-x}+3x^3+1}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu g(x)}{g(x)}-\dfrac{e^{-x}-3x^3-1}{g(x)}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu g(x)}{g(x)}-\dfrac{\cancel{g(x)}}{\cancel{g(x)}}\right)=0-1=-1$ γιατί για $x\neq0$ είναι

$$\left|\frac{\eta\mu g(x)}{g(x)}\right|=\frac{|\eta\mu g(x)|}{|g(x)|}\leq\frac{1}{|g(x)|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|g(x)|}\leq\frac{\eta\mu g(x)}{g(x)}\leq\frac{1}{|g(x)|}\ .$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-3x^3-1\right)=0-\infty-1=-\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|g(x)|}\overset{|g(x)|=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|g(x)|}\right)=0$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu g(x)}{g(x)}=0$.

Δ4. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu g(x)-g(x)\right)\underset{\substack{x\to+\infty,\, u\to-\infty\\ u\to-\infty}}{\overset{u=g(x)}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}(\eta\mu u-u)=\lim\limits_{u\to-\infty} u\left(\frac{\eta\mu u}{u}-1\right)=-\infty(0-1)=+\infty$ γιατί

για $u<0$ είναι $\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right|\le\left|\frac{1}{u}\right|=-\frac{1}{u}\Leftrightarrow\frac{1}{u}\le\frac{\eta\mu u}{u}\le-\frac{1}{u}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{u}\right)=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{u}\right)$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{f(x)}+3^{f(x)}-5}{3^{f(x)}+5^{f(x)}}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{2^u+3^u-5}{3^u+5^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{3^u\left(\left(\frac{2}{5}\right)^u+1-\frac{5}{5^u}\right)}{5^u\left(\left(\frac{3}{5}\right)^u+1\right)}=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^u\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^u+1-\frac{5}{5^u}}{\left(\frac{3}{5}\right)^u+1}=0$$

Δ5. Έστω $h(x)=g^2(x)+4g(x)-5+5x,\ x\in[1,2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(1)=g^2(1)+4g(1)-5+5=g(1)\left(g(1)+4\right)=\left(\frac{1}{e}-4\right)\left(\frac{1}{e}-\cancel{4}+\cancel{4}\right)<0$ και

$h(2)=g^2(2)+4g(2)+5$. Το τριώνυμο $g^2(2)+4g(2)+5$ έχει $\Delta=-4<0$, οπότε

$h(2)=g^2(2)+4g(2)+5>0$.

Επειδή $h(1)h(2)<0$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$h(x_0)=0\Leftrightarrow g^2(x_0)+4g(x_0)=5-5x_0$.

Είναι $f(x)=\eta\mu g(x)-g(x)$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x|\le|x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, άρα

για $x>0$ είναι $|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x$, ενώ για $x<0$ είναι $|\eta\mu x|<-x\Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x$.

Επειδή $x_0>0$ είναι $g(x_0)<0$, οπότε

$g(x_0)<\eta\mu g(x_0)<-g(x_0)\Rightarrow \eta\mu g(x_0)-g(x_0)>0\Leftrightarrow f(x_0)>0$